

Олимпиадная работа
муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников
по математике

учащегося 9 класса
муниципального автономного общеобразовательного учреждения
«Средняя общеобразовательная школа №40»
Старооскольского городского округа Белгородской области

Русанова Николая Васильевича

Педагог-наставник:
учитель математики МАОУ
«Средняя общеобразовательная школа №40»
Разинкова Наталия Сергеевна

Случай R_k - число пассажиров сказавших k
 а L_k - масса самолетов k
 из года

№ п/п	каждо самолет	т.ч.д. проверка мех
1	5	Э.Н. Соколов А.В. Козлов
2	0	И.В. Козлов И.В. Козлов
3	7	М.В. Козлов Г.Н. Козлов
4	1	И.В. Козлов И.В. Козлов
5	5	И.В. Козлов И.В. Козлов
итого, 18		

$$R_0 + L_0 = 8 \quad R_1 + L_1 = 8 \quad R_2 + L_2 = 8 \quad R_3 + L_3 = 8$$

$$\text{Всего пассажиров: } R_0 + R_1 + R_2 + R_3 = 16$$

$$\text{Всего самолетов: } L_0 + L_1 + L_2 + L_3 = 16$$

Пассажиры сказавшие k влезли в k -ую очередь.

Масса самолетов k не может быть больше k
 массы от 0 до 3, но не k .

Если масса самолета больше массы пассажира
 то пассажир не может влезть в самолет.

Пассажиры сказавшие 0 очередь могут влезть от 0 до 3

Пассажиры сказавшие 1 очередь могут влезть от 0, 2, 3 очереди

Пассажиры сказавшие 2 очереди могут влезть от 0, 1, 3 очереди

Пассажиры сказавшие 3 очереди могут влезть от 0 до 2 очереди

$$\text{Пусть } x = L_3 \text{ тогда } R_3 = 8 - x$$

$$\text{Пассажиры "3" влезут } 3(8 - x) \text{ человек}$$

$$\text{Масса "3" влезет } 2x \text{ человек}$$

$$\text{Общая сумма масса: } S = 0 \cdot R_0 + 1 \cdot R_1 + 2 \cdot R_2 + 3 \cdot R_3 + 3 \cdot L_0 + 3 \cdot L_1 + 3 \cdot L_2 + 2 \cdot L_3$$

$$R_k + L_k = 8 \text{ где } k = 0, 1, 2, 3 \text{ тогда}$$

$$S = (0R_0 + 3(8 - R_0)) + (1R_1 + 3(8 - R_1)) + (2R_2 + 3(8 - R_2)) + (3R_3 + 2(8 - R_3))$$

упростим: на каждую из самолетов

$$k=0: 0R_0 + 24 - 3R_0 = 24 - 3R_0$$

$$k=1: 1R_1 + 24 - 3R_1 = 24 - 2R_1$$

$$k=2: 2R_2 + 24 - 3R_2 = 24 - R_2$$

$$k=3: 3R_3 + 16 - 2R_3 = 16 + R_3$$

Сумма

(09-63)

$$S = (24 - 3R_0) + (24 - 2R_1) + (24 - R_2) + (16 + R_3)$$

$$S = 88 - 3R_0 - 2R_1 - R_2 + R_3$$

Но $R_0 + R_1 + R_2 + R_3 = 16$, откуда $R_3 = 16 - R_0 - R_1 - R_2$

$$S = 88 - 3R_0 - 2R_1 - R_2 + (16 - R_0 - R_1 - R_2)$$

$$S = 104 - 4R_0 - 3R_1 - 2R_2$$

$R_0 = R_1 = R_2 = 0$ тогда $R_3 = 16$

Но $R_3 \leq 8$ по условию $R_3 + L_3 = 8$ и $L_3 \geq 0$ значит $R_3 \leq 8$

$R_3 = 8$ тогда $L_3 = 0$

$R_0 = R_1 = R_2 = ?$

и $R_0 + R_1 + R_2 + R_3 = 16$ и $R_3 = 8 \Rightarrow R_0 + R_1 + R_2 = 8$

~~$S = 104$~~ $4R_0 + 3R_1 - 2R_2$ при $R_0 + R_1 + R_2 = 8$

Пусть $R_0 = 0$ $R_1 = 0$ $R_2 = 8 \Rightarrow 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 8 = -16$

$S = 104 - 16 = 88$

Ответ: 88 может

№2

Сумма цифр меняется в основном на 1 при переходе $n \rightarrow n+1$, кроме
когда есть перенос (тогда сумма цифр падает.)

Если есть 18 чисел подряд из суммы цифр - 18 чисел

среди 18 последовательных натуральных чисел обязательно

есть число кончающееся на 99. При переходе от такого

числа к следующему сумме цифр уменьшается на более чем 1
например (99 → 100: сумма 18 → 1)

Поэтому сумма цифр не может быть из-за разрыва

чисел

Гипотеза

109-63

$$S = (2u - 3k_0) + (2u - 2k_1) + (2u - k_2) + (16 + k_3)$$

$$S = 88 - 3k_0 - 2k_1 - k_2 + k_3$$

так $k_0 + k_1 + k_2 + k_3 = 16$ тогда $k_3 = 16 - k_0 - k_1 - k_2$

$$S = 88 - 3k_0 - 2k_1 - k_2 + (16 - k_0 - k_1 - k_2)$$

$$S = 104 - 4k_0 - 3k_1 - 2k_2$$

$k_0 = k_1 = k_2 = 0$ тогда $k_3 = 16$

Но $k_3 \leq 8$ поэтому $k_3 + L_3 = 8$ и $L_3 \geq 0$ значит $k_3 < 8$

$k_3 = 8$ тогда $L_3 = 0$

$k_0 = k_1 = k_2 = ?$

и $k_0 + k_1 + k_2 + k_3 = 16$ и $k_3 = 8 \Rightarrow k_0 + k_1 + k_2 = 8$

$4k_0 + 3k_1 + 2k_2$ при $k_0 + k_1 + k_2 = 8$

$4k_0 + 3k_1 + 2k_2$ при $k_0 + k_1 + k_2 = 8$

Пусть $k_0 = 0$ $k_1 = 0$ $k_2 = 8 \Rightarrow 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 8 = 16$

$$S = 104 - 16 = 88$$

Ответ: 88 может

199
Если среди 10 последовательных натуральных чисел
среди 10 последовательных натуральных чисел отсутствует хотя бы одно
число, кратное 9. При переходе от макс. числа к след. цифре
число увеличивается на 1 (99 → 100: цифра 18 → 1)
Поскольку цифра 9 не может быть из-за разрыва
числа

№3

Пусть корни $p=3^n$, $q=3^{n+1}$, $r=3^{n+2}$, $s=3^{n+3}$
 уравнение $(x^2 - ax + c) \cdot (x^2 - bx + c) = 0$ — корни разбиты на 2 пары —
 каждая пара корней одного квадратного трехчлена имеет в своем
 произведении корней c .

Пусть $\{p, s\}$ — первая пара, а $\{q, r\}$ — вторая

тогда $p+s=a$ или b , $q+r=$ другой коэффициент $ps=c, qr=c$

$ps = 3^n \cdot 3^{n+3} = 3^{2n+3}$, $qr = 3^{n+1} \cdot 3^{n+2} = 3^{2n+3}$ — следовательно $ps=qr=c=3^{2n+3}$

тогда $p+s = 3^n + 3^{n+3} = 3^n(1+27) = 28 \cdot 3^n$

$q+r = 3^{n+1} + 3^{n+2} = 3^{n+1}(1+3) = 4 \cdot 3^{n+1} = 12 \cdot 3^n$

поскольку $a > b$ $a = 28 \cdot 3^n$, $b = 12 \cdot 3^n$

тогда $3a - 4b = 3 \cdot 28 \cdot 3^n - 4 \cdot 12 \cdot 3^n = (84 - 48) \cdot 3^n = 36 \cdot 3^n = 4 \cdot 9 \cdot 3^n = 4 \cdot 3^{n+2}$

Ответ: $2 \text{ и } 3$

№4

Дано
 ABCD — четырехугольник.
 $a \cap BP = X$
 $a \cap CP = Y$

ABX и ACY — равнобедренные
 А

- 1) Вспомогательное построение углов в исход. окружности
 $\angle APB = \angle ACB$ (опираются на дугу AB)
 $\angle CPD = \angle CAP$ (опираются на дугу CD)

2) выразим $\angle AXB$

$\angle AXB = 180^\circ - \angle BAX - \angle ABX$

$\angle BAX = \angle BAD$ (т.к. X лежит на BP а A, X, P коллинеарны по II ма СД поэтому AX — часть AY)

Рассмотрим BXP:

$\angle AXB = \angle APB + \angle XBP$

Но X лежит на BP \Rightarrow XBP угол между BX и BP т.е.

$\angle XBP = \angle CPD \Rightarrow \angle AXB = \angle APB + \angle CPD$

$\angle AXB = \angle ACB + \angle CAP$

3) выразим $\angle AYC = \angle YAC$

$$\angle AYC = 180^\circ - \angle YAC - \angle YCA$$

$$\angle YAC = \angle DAC \text{ (т.к. } Y \text{ на } CD)$$

$$\angle YCA = \angle BCA \text{ (т.к. } Y \text{ на } CB)$$

Рассмотрим $\triangle ABC$

$$\angle AYC = 180^\circ - \angle DAC - \angle BCA$$

$$\angle DAC + \angle BCA = 180^\circ - \angle ABC$$

$$\text{в окружности } ABCD: \angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$$

Рассмотрим $\triangle ACD$:

$$\angle AYC = 180^\circ - \angle CAD - \angle ACD$$

$$\angle ACB + \angle CAD = \angle AYC$$

$$\text{след в } \triangle ACY \quad \angle AYC = 180^\circ - \angle YAC - \angle YCA$$

$$\angle AXB = \angle AYC$$

4) Пусть t - касательная ~~к~~ к окружности (ABX) в точке A

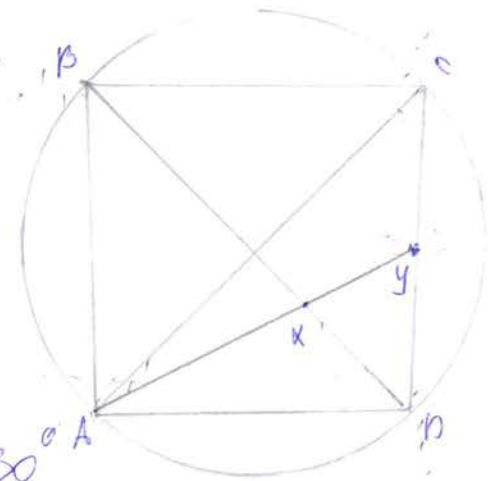
$$\Rightarrow \angle(t, AA) = \angle AXB$$

в окружности ACY угол между хордой AC и касательной t равен вписанному углу опирающемуся на дугу AC т.е. $\angle AYC$

т.к. $\angle AXB = \angle AYC$ то t также касательна к (ACY) в точке A

Следовательно, окружности ABX и ACY имеют общую точку касания A

и т.д.



Дано a_1, a_2, \dots, a_{10} - различные числа

$$P_1 = a_1 a_2 a_3 a_4 \quad P_5 = a_5 a_6 a_7 a_8 \quad P_9 = a_9 a_{10} a_1 a_2$$

$$P_2 = a_2 a_3 a_4 a_5 \quad P_6 = a_6 a_7 a_8 a_9 \quad P_{10} = a_{10} a_1 a_2 a_3$$

$$P_3 = a_3 a_4 a_5 a_6 \quad P_7 = a_7 a_8 a_9 a_{10}$$

$$P_4 = a_4 a_5 a_6 a_7 \quad P_8 = a_8 a_9 a_{10} a_1$$

Некоторые из этих равны 11, 12, ..., 20

Запишем все P_k :

$$P_1 P_2 P_3 \dots P_{10} = (a_1 a_2 a_3 \dots a_{10})^4$$

$$P_1 P_2 P_3 \dots P_{10} = 11 \cdot 12 \cdot 13 \dots 20$$

$$N = 11 \cdot 12 \dots 20 \Rightarrow (a_1 \dots a_{10})^4 = N$$

N - произведение четвертой степени некоторого числа

$$N = 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20$$

$$12 = 2^2 \cdot 3, 14 = 2 \cdot 7, 15 = 3 \cdot 5, 16 = 2^4, 18 = 2 \cdot 3^2, 20 = 2^2 \cdot 5$$

Простые числа: 11, 13, 17, 19

$$N = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^1 \cdot 17^1 \cdot 19^1$$

Чтобы N было и степенью всех показателей должны делиться

на 4

10 не делится, 4 делится, 2 не делится, 1 и 1 простыми не делится

Следовательно N не является четвертой степенью целого и разлагается на 8 чисел.

Ответ: нет. Нельзя.